1.1 – 1.23

1.1

1.1 把总电量为 Q 的同一种电荷分成两部分，一部分均匀分布在地球上，另一部分均匀分布在月球上，使它们之间的库仑力正好抵消万有引力. 已知 $1/(4\pi\varepsilon_0)=9.00\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$，引力常数 $G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$，地球质量为 $5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}$，月球质量为 $7.34\times10^{22}\,\mathrm{kg}$.

(1) 求 Q 的最小值；

(2) 如果电荷分配与质量成正比，求 Q.

解：(1) 设地球上带电 Q_E，月球带电 Q_M，地球质量为 m，太阳质量为 M，则

$$\frac{GMm}{r^2}=\frac{Q_EQ_M}{4\pi\varepsilon_0r^2},Q_E+Q_M=Q$$

有基本不等式得

$$\begin{aligned}Q=Q_E+Q_M&\geq2\sqrt{Q_EQ_M}=2\sqrt{4\pi\varepsilon_0GMm}\\&=2\sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times7.34\times10^{22}}{9.00\times10^9}}\\&\approx1.14\times10^{14}(C)\end{aligned}$$

(2) 设 $Q_E=kM,Q_M=km$，则

$$Q=k(M+m),\frac{GMm}{r^2}=\frac{k^2Mm}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

得 $a=\sqrt{4\pi\varepsilon_0G}$，于是

$$Q=\sqrt{4\pi\varepsilon_0G}(M+m)=\sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}}{9.00\times10^9}}(5.98\times10^{24}+7.34\times10^{22})\approx5.21\times10^{14}(C)$$

1.2

1.2 真空中有一点电荷 Q 固定不动，另一质量为 m、电荷为 $-q$ 的质点，在它们之间库仑力的作用下，绕 Q 做匀速圆周运动，半径为 r，周期为 T. 证明

1.2

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{qQ}{16\pi^3\varepsilon_0 m}$$

证明：质点速度为 $v=\frac{2\pi r}{T}$，质点在做圆周运动，所以

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

整理得

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{Qq}{16\pi^3\varepsilon_0 m}$$

1.3

1.3 有三个点电荷，电量都是 $q=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，分别固定在边长为 $a=3.0\times10^{-10}\,\mathrm{m}$ 的正三角形三个顶点，在这三角形中心 O，有一个质量为 $m=2.3\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$，电量为 $Q=-4.8\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ 的粒子.

(1) 证明：这个粒子处在平衡位置(即作用在它上面的库仑力为零)；

(2) 求这个粒子以 O 为中心沿一轴线(该轴线过 O 并与三角形的平面互相垂直)做微小振动的频率 ν.

解：(1) 证：处在 O 点的粒子受到来自三个顶点的库仑力大小相等，均为 $\frac{|Q|q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r=\frac{a}{\sqrt{3}}$，三个力均指向顶点且两两夹角均为 120°，合力为 0.

(2) 过 O 点垂直于三角形所在平面做 x 轴，当粒子处于 x 处，三个电荷对粒子的合力为（与三角形所在平面平行的分量相互抵消）

$$F=\frac{3Qq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

当 $x\ll r$ 时

$$F\approx\frac{3Qqx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

再由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{3qQx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=0$$

这表明粒子在作简谐运动，角频率 $\omega=(\frac{3Qq}{4\pi\varepsilon_0 mr^3})^{\frac{1}{2}}$ 于是频率

$$\begin{aligned}\nu=\frac{\omega}{2\pi}&=\frac{1}{2\pi}(\frac{-3Qq}{4\pi\varepsilon_0 mr^3})^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2\pi}(\frac{3\times4.8\times10^{-19}\times1.6\times10^{-19}\times8.99\times10^{9}}{2.3\times10^{-26}\times(\frac{3\times10^{-10}}{\sqrt{3}})^3})^{\frac{1}{2}}\\&\approx2.1\times10^{13}(Hz)\end{aligned}$$

1.4

1.4 电量为 Q 的两个点电荷，相距 $2l$，在其连线的中垂面上放一点电荷 q_0，证明该点电荷在中垂面上受力的极大值的轨迹是一个圆，并给出该圆的半径.

1.4

解：设处于中垂面上的点电荷与连线的距离为 r，q_0 受到的力与中垂面平行，大小为

$$F = \frac{2Qq_0r}{4\pi\varepsilon_0(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

当 $\frac{dF}{dr}=0$ 时，F 取极值，此时有

$$\frac{l^2-2r^2}{(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

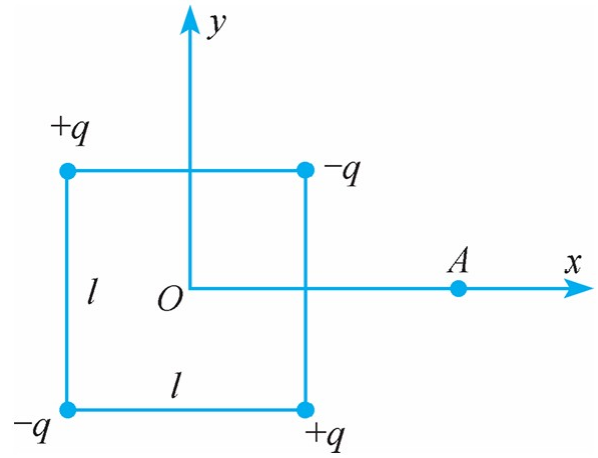
解得 $r=\frac{l}{\sqrt{2}}$，验证得该值为极大值，因此点电荷受力极大所在位置的轨迹是一个半径为 $\frac{l}{\sqrt{2}}$ 的圆.

1.5

1.5　习题 1.5 图中的 q 和 l 都已知，这样的四个点电荷称为平面电四极子. 图中 A 点与电四极子在同一平面内，它到电四极子中心 O 的距离为 x，AO 与正方形的两边平行.

(1) 求 A 点的电场强度 $\boldsymbol{E}$；

(2) 当 $x \gg l$ 时，$\boldsymbol{E}$=？



习题 1.5 图

(1) 二三象限的点电荷在 A 处的电场为

$$\boldsymbol{E}_{23} = -2 \times \frac{ql/2}{4\pi\varepsilon_0[(l/2)^2 + (x + l/2)^2]^{3/2}}\boldsymbol{e}_y$$

一四象限的点电荷在 A 处的电场为

$$\boldsymbol{E}_{14} = 2 \times \frac{ql/2}{4\pi\varepsilon_0[(l/2)^2 + (x - l/2)^2]^{3/2}}\boldsymbol{e}_y$$

于是 A 的总电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[(l/2)^2 + (x - l/2)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(l/2)^2 + (x + l/2)^2]^{3/2}}\right]\boldsymbol{e}_y$$

(2) 当 $x \gg l$ 时

$$\frac{1}{[(l/2)^2 + (x - l/2)^2]^{3/2}} \approx \frac{1}{x^3}(1 - \frac{l}{x})^{-3/2} \approx \frac{1}{x^3}(1 + \frac{3l}{2x})$$

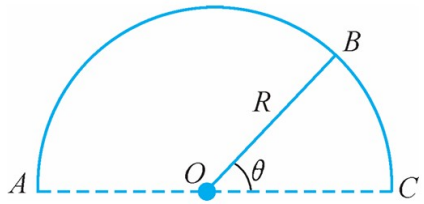
$$\frac{1}{[(l/2)^2 + (x + l/2)^2]^{3/2}} \approx \frac{1}{x^3}(1 + \frac{l}{x})^{-3/2} \approx \frac{1}{x^3}(1 - \frac{3l}{2x})$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 x^4}\boldsymbol{e}_y$$

1.6

1.6 如习题 1.6 图所示，电荷分布在半径为 R 的半圆环上，线电荷密度为 $\lambda_0\sin\theta$，λ_0 为常数，θ 为半径 OB 和直径 AC 间的夹角. 证明 AC 上任一点的电场强度都与 AC 垂直.

习题 1.5 图



习题 1.6 图

证明 解法一：设 D 为直径 AC 上任一点，D 到环心 O 的距离为 r，要证明 D 点的 E 垂直于 AC，只需证明 E 沿 AC 方向的分量为零即可. 设环的半径为 R，则 B 处弧元 $R\mathrm{d}\theta$ 上的电荷量为 $\mathrm{d}q=\lambda_0\sin\theta R\mathrm{d}\theta$，它在 D 点产生的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

式中，x 是 B 到 D 的距离，其值为 $x=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 沿 AC 方向的分量为

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\alpha$$

$$E_x=\frac{\lambda_0 R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{R\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

积分分子第一项

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta=R\int_{-1}^{1}\frac{u\mathrm{d}u}{(R^2+r^2-2Rru)^{3/2}}=\frac{2r}{R(R^2-r^2)}$$

其中用到不定积分公式

$$\frac{x\mathrm{d}x}{(a+bx)^{3/2}}=\frac{2}{b^2}\left(\sqrt{a+bx}+\frac{a}{\sqrt{a+bx}}\right)$$

积分分子第二项

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}=-\frac{2r}{R(R^2-r^2)}$$

综上 $E_x=0$

解法二：题目相当于证明 AC 是等势面，所以我们直接计算 D 点的电势

$$\varphi_D=\frac{\lambda_0 R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}$$

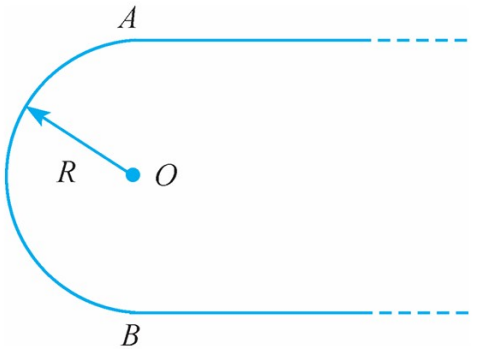
设 $t=r/R<1$，根据积分

$$\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{1+t^2-2tx}}=\left.\frac{\sqrt{1+t^2-2tx}}{t}\right|_{-1}^{1}=2$$

可证明 AC 为等势面，从而半径上的电场线必然垂直于 AC.

1.7

1.7　一无限长均匀带电导线，线电荷密度为 λ，一部分弯成半圆形，其余部分为两条无穷长平行直导线，两直线都与半圆的直径 AB 垂直，如习题 1.7 图所示，求圆心 O 处的电场强度.



习题 1.7 图

根据对称性可以判断，O 点的电场与两直线平行，只需计算平行分量. 用电场强度叠加原理求解，先计算半圆上的电荷对 O 点电场的贡献. 设圆的半径为 R，圆上任意一点的位置由通过该点的矢径与直径 AB 之间的夹角 $\theta(\in [0,\pi])$ 表示，考察位于 θ 处的线电荷元 $\mathrm{d}q = \lambda R\mathrm{d}\theta$，它在 O 点产生的电场强度的平行分量为（背离圆弧、指向右侧为正）

$$\mathrm{d}E_{1\parallel} = \frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta$$

将上式在 $[0,\pi]$ 上积分，求得整个半圆弧电荷对 O 点电场的贡献

$$E_1 = \lambda/2\pi\varepsilon_0 R$$

再求两条半无穷直线电荷对 O 点电场平行分量的贡献，它正好等于单根半无穷直线电荷贡献的 2 倍. 考虑其中一条半无穷长直线电荷，以其与半圆弧连接处为起点，沿直线取坐标 x，则位于该处的线电荷元 $\mathrm{d}q = \lambda\mathrm{d}x$ 在 O 点产生的电场强度的平行分量（向右为正）为

$$\mathrm{d}E_{2\parallel} = \frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

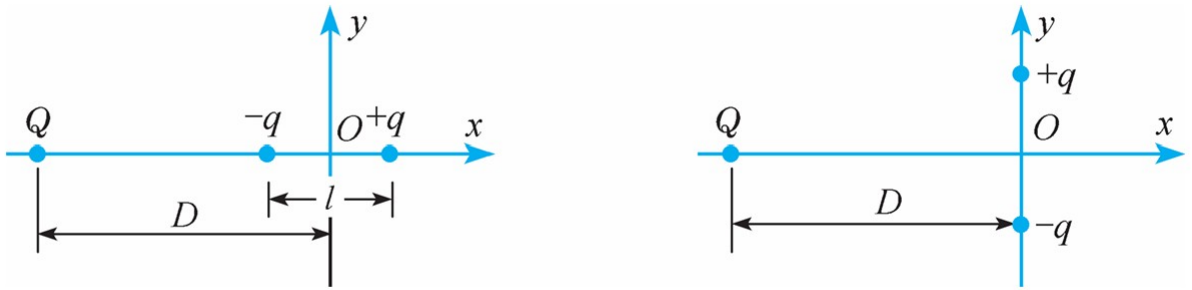
过 $[0,\infty)$ 积分后加倍，求得两条半无穷长直线电荷对 O 点电场的总贡献为

$$E_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

将两部分贡献求和得 $E_1 + E_2 = 0$ 故，O 点电场为零.

1.8

1.8　把电偶极矩为 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 的电偶极子放在点电荷 Q 的电场内，$\boldsymbol{p}$ 的中心 O 到 Q 的距离为 D，如习题 1.8 图所示. 若 $\boldsymbol{p}$ 分别(1)平行于 OQ；(2)垂直于 OQ，求偶极子所受的力和力矩.



习题 1.8 图

偶极子平行于 OQ 时，偶极子受力

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-qQ}{(D-l/2)^2}+\frac{qQ}{(D+l/2)^2}\right]\boldsymbol{e}_x=\frac{-QD\boldsymbol{p}}{2\pi\varepsilon_0[D^2-(l/2)^2]^2}$$

偶极子所受库仑力经过原点即偶极子中心，以偶极子中心为参考点力矩为 0.

偶极子垂直于 OQ 时，偶极子受力只有 y 方向分量，x 方向分量为零

$$\boldsymbol{F}=2\times\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0[D^2+(l/2)^2]}\frac{l/2}{\sqrt{D^2+(l/2)^2}}=\frac{Q\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0[D^2+l^2/4]^{3/2}}$$

仍以偶极子中心为参考点，仅力的 x 分量对力矩有贡献，所受力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\left(\frac{-l}{2}\boldsymbol{e}_y\right)\times\frac{-qQ\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0[D^2+l^2/4]^{3/2}}+\left(\frac{l}{2}\boldsymbol{e}_y\right)\times\frac{qQ\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0[D^2+l^2/4]^{3/2}}\\&=\frac{qQDl\boldsymbol{e}_z}{4\pi\varepsilon_0[D^2+l^2/4]^{3/2}}=\frac{QD\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0[D^2+l^2/4]^{3/2}}\end{aligned}$$

1.9

1.9 有两个同心的均匀带电球面，内、外半径分别为 R_1 和 R_2，外球面的电荷面密度为 $+\sigma$，球外各处的电场强度都是零，试求：

(1) 内球面上的电荷面密度；

(2) 两球面间离球心为 r 处的电场强度 $\boldsymbol{E}$；

(3) 小球面内的电场强度 $\boldsymbol{E}$.

(1) 由题意，半径为 R_2 的外球带电 $Q_2 = 4\pi\sigma R_2^2$，球外电场为零即 $E(r > R_2) = 0$. 设内球面带电量 Q_1，取以体系中心为圆心，半径大于 R_2 的球面为高斯面，由于高斯定理

$$\oint_{S(r=R_2)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} = 0$$

可得内球面带电量和电荷面密度

$$Q_1 = -Q_2 = -4\pi\sigma R_2^2, \quad \sigma_1 = -\frac{R_2^2}{R_1^2}\sigma$$

(2) 以 O 为球心作半径为 $r \in (R_1, R_2)$ 的球高斯面 S_r，由对称性可知面上电场沿径向方向，大小均匀，由高斯定理推得

$$\oint_{S_r} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(r) \oint_{S_r} \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

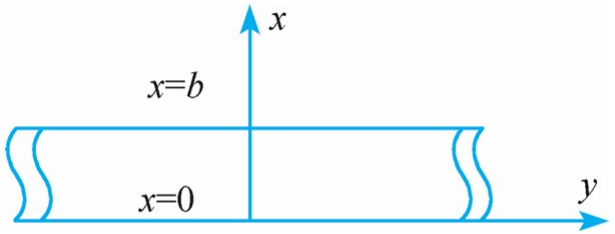
从而求得两球面间离球心为 r 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(r) = -\frac{\sigma R_2^2 \boldsymbol{r}}{\varepsilon_0 r^3}, \quad (R_1 < r < R_2)$$

(3) 内球面内部无任何电荷，根据高斯定理和系统的球对称性可得，内部无电场.

1.10

1.10 如习题 1.10 图所示，一厚度为 b 的无限大均匀带电板置于真空中，电荷体密度为 $\rho=kx(0\leqslant x\leqslant b)$，其中 k 是一正的常数，试求空间各点的电场强度.



习题 1.10 图

首先根据对称性可分析出电场只有 x 分量；根据叠加原理，可以这样分析带点体系及其电场：把任一点处的电场视作带电板各薄层微元产生的电场在此处的叠加. 在 x 处厚度为 $\mathrm{d}x$ 的薄板在空间 P 点产生的电场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(x_P;x)=\frac{\sigma(x)}{2\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(x_P-x)\boldsymbol{e}_x,\quad \sigma(x)=\rho(x)\mathrm{d}x=kx\mathrm{d}x$$

这里的 sgn() 是符号函数的意思. 于是空间任意处电场可以直接积分算出：

$$E(x_p)=\int_0^b\frac{kx}{2\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(x_P-x)\mathrm{d}x$$

$$\boldsymbol{E}(x_p>b)=-\boldsymbol{E}(x_p<0)=\frac{kb^2}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x,\quad \boldsymbol{E}(x_p\in(0,b))=\frac{k(2x_p^2-b^2)}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x$$

1.11

1.11 根据量子力学，氢原子在正常状态下核外电荷的分布如下：离核心 r 处，电荷的体密度 $\rho(r)=-qe^{-2r/a}/(\pi a^3)$，式中 $q=1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ 是核外电荷总量的绝对值，$a=5.29\times10^{-11}\,\mathrm{m}$ 是玻尔半径. 试求：

(1) 核外电荷的总电量；

(2) 核外电荷在 r 处的电场强度 $\boldsymbol{E}$.

(1) 如题意，电荷密度呈球对称分布，核外总电量直接由积分算出

$$Q=\int_V \rho \mathrm{d}V=-q=-1.60\times10^{-19}(\mathrm{C})$$

这里使用到了 Γ 函数

$$\Gamma(t\in\mathbb{Z}^+)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x=(t-1)!$$

(2) 由对称性，电场只有径向分量 $\boldsymbol{E}=E_r(r)\boldsymbol{e}_r$ 和积分形式高斯定理得

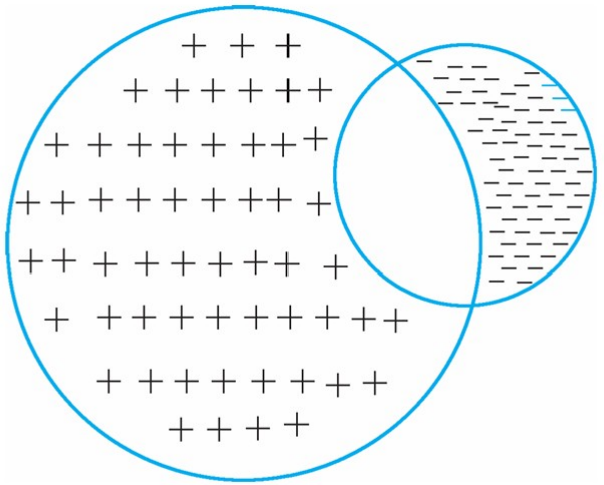
$$\oint_{S(r)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi r^2E_r(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')\mathrm{d}r'$$

解出

$$\boldsymbol{E}(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{ar}+\frac{1}{r^2}\right)\mathrm{e}^{-2r/a}-\frac{1}{r^2}\right]\boldsymbol{e}_r$$

1.12

1.12　如习题 1.12 图所示，空间有两个球，球心间距离小于半径之和，因此有一部分重叠（见图）. 今使一球充满密度为 ρ 的均匀正电荷，另一球充满密度为 $-\rho$ 的均匀负电荷，以至于重叠区域无电荷. 求这重叠区域内的电场强度 $\boldsymbol{E}$，说明 $\boldsymbol{E}$ 是匀强电场.



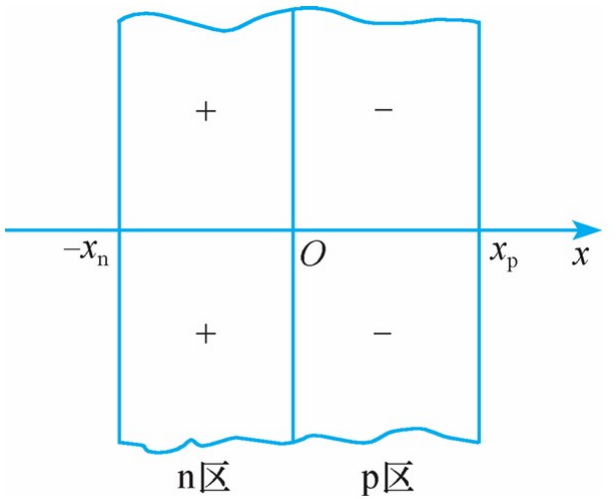
习题 1.12 图

1.13

1.13　在半导体 p-n 结附近总是堆积着正、负电荷，在 n 区内有正电荷，p 区内有负电荷，两区电荷的代数和为零. 我们把 p-n 结看成一对带正、负电荷的无限大平板，它们相互接触(习题 1.13 图). 取 x 轴的原点在 p、n 区的交界面上，n 区的范围是 $-x_n \leqslant x \leqslant 0$，p 区的范围是 $0 \leqslant x \leqslant x_p$. 设两区内电荷分布均匀，n 区电荷密度为 $N_D e$，p 区电荷密度为 $-N_A e$，称为突变结模型. 设 N_D、N_A 是常数，且 $N_A x_p = N_D x_n$，证明电场的分布为

(1) n 区：$E(x) = N_D e(x_n + x)/\varepsilon_0$；

(2) p 区：$E(x) = N_A e(x_p - x)/\varepsilon_0$.



习题 1.13 图

1.14

1.14　设气体放电形成的等离子体圆柱内的体电荷分布可表示为 $\rho_e(r)=\rho_0\left[1+(r/a)^2\right]^{-2}$，$r$ 是到其对称轴的距离，ρ_0 是轴线上的电荷密度，a 是常数，求电场分布.

1.14

设所考察的场点离圆柱轴线的距离 r 远小于柱长，从而可将圆柱体作为无限长柱体处理. 由对称性，电场指向垂直于圆柱轴的径向 $\boldsymbol{e}_r$，大小仅与 r 有关. 取高为 h、半径为 r 的柱形高斯面 S，则由高斯定理得

$$\oint_{E_S}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=2\pi rhE=\int_0^r 2\pi r\rho(r)\mathrm{d}r/\varepsilon_0=\pi h\rho_0 a^2\frac{r}{r^2+a^2}/\varepsilon_0$$

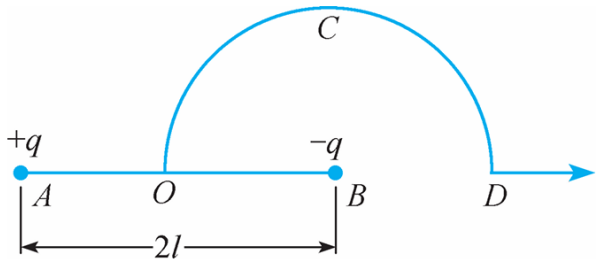
$$\boldsymbol{E}=\frac{a^2\rho_0 r\boldsymbol{e}_r}{2\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

1.15

1.15 如习题 1.15 图所示，$AB=2l$，弧 OCD 是以 B 为中心，l 为半径的半圆. A 点有正电荷 $+q$，B 点有负电荷 $-q$.

(1) 把正电荷 Q 从 O 点沿弧 OCD 移到 D 点，电场力对它做了多少功?

(2) 把负电荷 $-Q$ 从 D 点沿 AB 延长线移到无穷远处，电场力对它做了多少功?



习题 1.15 图

(1) 把正电荷 Q 从 O 点沿弧 OCD 移到 D，电荷-q 对正电荷 Q 不做功，又因为做功与路径无关，电荷 +q 对于 Q 做的功为

$$\int_{OCD} Q\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{OD} Q\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{l}^{3l} \frac{qQ\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qQ}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

(2)+q 对 Q 做的功:

$$W_+ = \int_{3l}^{\infty} \frac{-qQ\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{-qQ}{12\pi\varepsilon_0 l}$$

-q 对 Q 做的功

$$W_- = \int_{l}^{\infty} \frac{qQ\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

根据叠加原理，总功

$$W = W_+ + W_- = \frac{qQ}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

1.16

1.16 证明:在无电荷分布的静电场中,凡是电场线都是平行直线的地方,电场强度的大小必定处处相等.换句话说,凡是电场强度的方向处处相同的地方,电场强度的大小必定处处相等.(提示:利用高斯定理和环路定理,分别证明沿同一电场线和不同电场线上任意两点的场强相等.)

证明：取柱形高斯面，上下底面分别记为 a，b，高为 h，轴向与电场线方向平行，底面积为一足够小的 ΔS,，由高斯定理得；$-E_a\Delta S + E_b\Delta S = 0$，得 $E_a = E_b$ 即同一电场线上任意两点电场强度相等.

作矩形回路 abcd，由环路定理得

$$\int_{abcd} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{ab} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{bc} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{cd} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{da} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

即

$$E_a h - E_d h = 0, E_a = E_d$$

因此，不同电场线的任意两点的场强也相等.

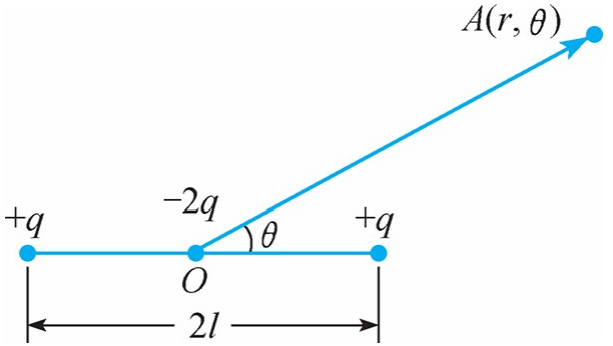
1.17

1.17　线电四极子如习题 1.17 图所示，求它在 $r \gg l$ 处的点 $A(r,\theta)$ 处所产生的电势 U 和电场强度 $\boldsymbol{E}$.

设无限远处为电视零点，根据叠加原理

$$U = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2-2lr\cos\theta}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2+2lr\cos\theta}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-2 + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{l}{r})^2-2(\frac{l}{r})\cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{l}{r})^2+2(\frac{l}{r})\cos\theta}}\right]$$



习题 1.17 图

对于远处 $r \gg l$，利用泰勒展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$$

保留二阶小量，有

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-2+1-\frac{1}{2}(\frac{l^2}{r^2}-\frac{2l}{r}\cos\theta)+\frac{3}{8}(\frac{l^2}{r^2}-\frac{2l}{r}\cos\theta)^2\right.$$
$$\left.+1-\frac{1}{2}(\frac{l^2}{r^2}+\frac{2l}{r}\cos\theta)+\frac{3}{8}(\frac{l^2}{r^2}+\frac{2l}{r}\cos\theta)^2\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}(-\frac{l^2}{r^2}+\frac{3l^2}{r^2}\cos^2\theta+\cdots)$$
$$= \frac{ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta-1)$$

电场为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$= \frac{3ql^2(3\cos^2\theta-1)}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\boldsymbol{e}_r + \frac{3ql^2\sin\theta\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^4}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$= \frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}[(3\cos^2\theta-1)\boldsymbol{e}_r + 2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta]$$

1.18

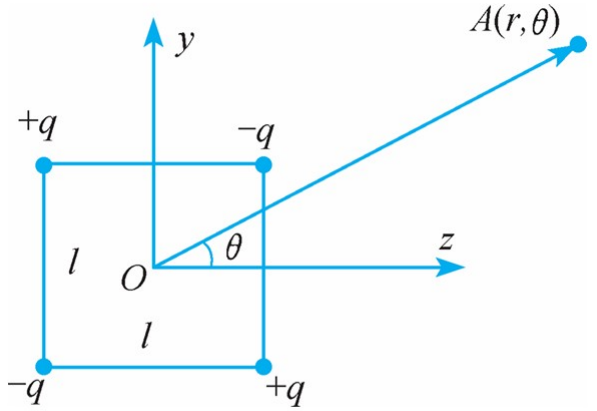
* 1.18　面电四极子如习题 1.18 图所示，点 $A(r,\theta)$ 与四极子共面，极轴 $(\theta=0)$ 通过正方形中心并与两边平行. 设 $r\gg l$，求面电四极子在点 A 处产生的电势和电场强度.

$$
\begin{aligned}
&+q:\left(-\tfrac{l}{2},\ +\tfrac{l}{2}\right),\\
&-q:\left(+\tfrac{l}{2},\ +\tfrac{l}{2}\right),\\
&-q:\left(-\tfrac{l}{2},\ -\tfrac{l}{2}\right),\\
&+q:\left(+\tfrac{l}{2},\ -\tfrac{l}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_1^2&=\left(rc+\tfrac{l}{2}\right)^2+\left(rs-\tfrac{l}{2}\right)^2=r^2+rl(c-s)+\tfrac{l^2}{2},\\
R_2^2&=\left(rc-\tfrac{l}{2}\right)^2+\left(rs-\tfrac{l}{2}\right)^2=r^2-rl(c+s)+\tfrac{l^2}{2},\\
R_3^2&=\left(rc+\tfrac{l}{2}\right)^2+\left(rs+\tfrac{l}{2}\right)^2=r^2+rl(c+s)+\tfrac{l^2}{2},\\
R_4^2&=\left(rc-\tfrac{l}{2}\right)^2+\left(rs+\tfrac{l}{2}\right)^2=r^2-rl(c-s)+\tfrac{l^2}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
R_i=r\sqrt{1+x_i},\qquad
\begin{cases}
x_1=\ \ \varepsilon(c-s)+\varepsilon^2/2,\\
x_2=-\varepsilon(c+s)+\varepsilon^2/2,\\
x_3=\ \ \varepsilon(c+s)+\varepsilon^2/2,\\
x_4=-\varepsilon(c-s)+\varepsilon^2/2.
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R_1}&=\frac{1}{r}\left[1-\frac{\varepsilon}{2}(c-s)+\varepsilon^2\left(\frac{3}{8}(c-s)^2-\frac{1}{4}\right)\right],\\
\frac{1}{R_2}&=\frac{1}{r}\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(c+s)+\varepsilon^2\left(\frac{3}{8}(c+s)^2-\frac{1}{4}\right)\right],\\
\frac{1}{R_3}&=\frac{1}{r}\left[1-\frac{\varepsilon}{2}(c+s)+\varepsilon^2\left(\frac{3}{8}(c+s)^2-\frac{1}{4}\right)\right],\\
\frac{1}{R_4}&=\frac{1}{r}\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(c-s)+\varepsilon^2\left(\frac{3}{8}(c-s)^2-\frac{1}{4}\right)\right].
\end{aligned}
$$



习题 1.18 图

$$
U=-\frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta
$$

$$
\boldsymbol{E}=-\nabla U=-\frac{9ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\boldsymbol{e}_r+\frac{3ql^2\cos 2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\boldsymbol{e}_\theta
$$

1.19

1.19 两均匀带电的无限长直轴圆筒，内筒半径为 a，沿轴线单位长度的电量为 λ_e，外筒半径为 b，沿轴线单位长度的电量为 $-\lambda_e$. 试求：

(1) 离轴线为 r 处的电势 U；

(2) 两筒的电势差.

(1) 以圆筒轴为 z 轴建立柱坐标系，由对称性可知，电场只有 $\boldsymbol{r}$ 分量，且仅与 r 有关. 取与圆筒共轴、高为 h、半径为 r 的圆柱面为高斯面，电通量 $\Phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi r h E$ 利用高斯定理可得

$$r < a, \Phi = 0,\ E = 0$$

$$a \leq r \leq b, \Phi = \frac{h\lambda_e}{\varepsilon_0},\ E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r > b, \Phi = 0,\ E = 0$$

设外筒为电势零点位置则

$$U = -\int_b^r E \mathrm{d}r = \begin{cases} \frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}, r \leq a \\ \frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{r}, a \leq r \leq b \\ 0, r \geq b \end{cases}$$

(2) 两筒间的电势差为

$$\Delta U = U(a) - U(b) = \frac{\lambda_e \ln\frac{b}{a}}{2\pi\varepsilon_0}$$

1.20

设氢原子处于基态时的核外电荷呈球对称分布，其电荷密度为 $\rho(r)=-q\mathrm{e}^{-2r/a}/(\pi a^3)$，$r$ 为离核的距离，q 为电子电荷的大小，a 是玻尔半径. 求在r 处，

(1) 核外电荷产生的电势；

(2) 所有电荷产生的电势.

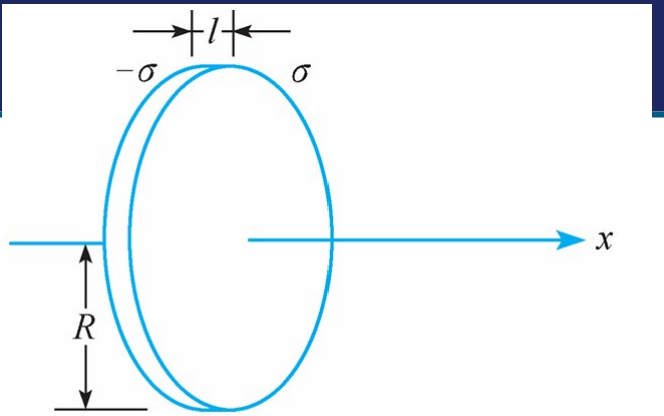
$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r \rho(R)R^2\mathrm{d}r + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^\infty \rho(R)R\mathrm{d}r \\
&= \frac{-q}{\pi\varepsilon_0 a^3 r}\int_0^r e^{-\frac{2R}{a}}R^2\mathrm{d}r - \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^3}\int_r^\infty e^{\frac{-2R}{a}}R\mathrm{d}r \\
&= -\frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^3 r}[-\frac{a^3}{4}(\frac{2r^2}{a^2}+\frac{2r}{a}+1)e^{\frac{-2r}{a}}+\frac{a^3}{4}] - \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^3}[\frac{a^3}{4}(\frac{2r}{a}+1)e^{-\frac{2r}{a}}] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[(\frac{1}{a}+\frac{1}{r})e^{\frac{-2r}{a}}-\frac{1}{r}]
\end{aligned}
$$

(2) 所有电荷在 r 处产生的电势为

$$
U_{all} = U + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a}+\frac{1}{r})e^{-\frac{2r}{a}}
$$

1.21

* 1.21　两个均匀带电的圆面共轴线，半径都为 R，相距为 l，电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$，它们间轴线的中点为原点 O，沿轴线取为 x 轴，如习题 1.21 图所示. 已知 $l \ll R$，试求轴线上 x 处的电势和电场强度.



习题 1.21 图

1.21

先求单个带电圆面产生的电势，考虑圆面上以圆心为原点 O，r 为半径、宽度为 dr 的环带，该环带上的电荷量为 $dq = 2\pi\sigma r dr$，他在轴线上离圆心为 x 处产生的电势为

$$dU = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma r \mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

积分得总电势

$$U=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-|x|)$$

再回到题中两个圆面，不难求得两个圆面各自产生的电势为

$$U_+=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{(x-\frac{l}{2})^2+R^2}-|x-\frac{l}{2}|]$$

$$U_-=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{(x+\frac{l}{2})^2+R^2}-|x+\frac{l}{2}|]$$

二者之和为

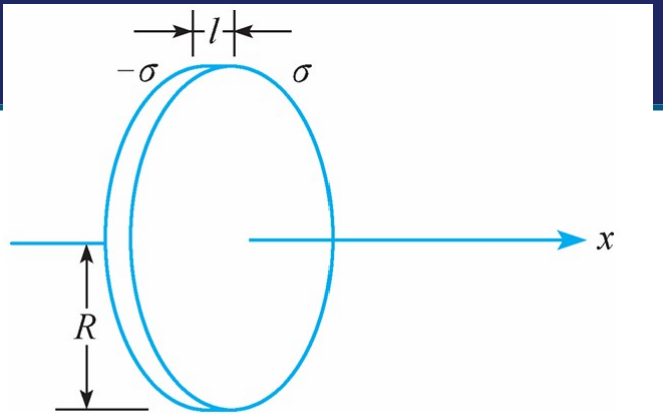
$$U=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[|x+\frac{l}{2}|-|x-\frac{l}{2}|+\sqrt{(x-\frac{l}{2})^2+R^2}-\sqrt{(x+\frac{l}{2})^2+R^2}\right]$$

因为 $l\ll R$, 上式中两根号项可化为

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-\frac{l}{2})^2+R^2}-\sqrt{(x+\frac{l}{2})^2+R^2}&\approx\sqrt{x^2-xl+R^2}-\sqrt{x^2+xl+R^2}\\&=\sqrt{x^2+R^2}\left[(1-\frac{xl}{x^2+R^2})^{\frac{1}{2}}-(1+\frac{xl}{x^2+R^2})^{\frac{1}{2}}\right]\\&\approx\sqrt{x^2+R^2}\left[1-\frac{xl}{2(x^2+R^2)}-1-\frac{xl}{2(x^2+R^2)}\right]\\&=-\frac{xl}{\sqrt{x^2+R^2}}\end{aligned}$$

此外，还有

$$|x+\frac{l}{2}|-|x-\frac{l}{2}|=\begin{cases}l,x>\frac{l}{2}\\2x,-\frac{l}{2}\le x\le\frac{l}{2}\\-l,x<-\frac{l}{2}\end{cases}$$



习题 1.21 图

$$U=\begin{cases}\frac{\sigma l}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}),x>\frac{l}{2}\\\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}(2-\frac{l}{\sqrt{x^2+R^2}})\approx\frac{\sigma x}{\varepsilon_0},-\frac{l}{2}\le x\le\frac{l}{2}\\-\frac{\sigma l}{2\varepsilon_0}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}),x<-\frac{l}{2}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{e}_x=\begin{cases}\frac{\sigma lR^2}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_x,x>\frac{l}{2}\\-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x,-\frac{l}{2}\le x\le\frac{l}{2}\\\frac{\sigma lR^2}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_x,x<-\frac{l}{2}\end{cases}$$

1.22

* 1.22　均匀带电立方体，证明 8 个顶角电势的代数和是中心点电势的 4 倍.

设立方体的边长为 2a，将其分为 8 个边长为 a 的小正方体，设每个小正方体上的电荷对大正方体中心产生的电势为 U，根据叠加原理，大正方体中心的电势为 8U 设大正方体中心为原点 O，xyz 轴与正方体变长平行，电荷密度为 ρ, 则

$$U=\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

大正方体对顶点 (a,a,a) 的电势为

$$\int_{-a}^a\int_{-a}^a\int_{-a}^a\frac{\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}}$$

令 $x'=\frac{x-a}{2},y'=\frac{y-a}{2},z'=\frac{z-a}{2}$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')}\right|=8$$

上述积分可化为

$$\int_{-a}^0\int_{-a}^0\int_{-a}^0\frac{\rho\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')}\right|\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(2x')^2+(2y')^2+(2z')^2}}=4\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{\rho\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=4U$$

所以八个顶点的总电势为 $32U$，为中心电势的 4 倍

1.23

* 1.23　定义半径为 R 的球面上电势平均值为

$$\bar{U}_S = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_S U_s(r_s)\mathrm{d}S$$

假设空间有多种类型的电荷分布(点电荷、带电体等),证明:(1)在没有电荷的区域里的任一点静电势 U_p 的值等于以该点为球心的球面上各点电势的平均值.即:

$$\bar{U}_S = U_p$$

(2)在空间任取一个半径为 R 的球面,如果电荷全部分布在这个封闭球面的内部,则球面的电势平均值为

$$\overline{U_s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\sum_{S内} q_i + \iiint_{V'} \rho \mathrm{d}V'\right)$$

1.23

设点电荷 q 位于 Q，球心为 O，球面 S 半径为 R。记 $a = OQ$。

在球面上任取一点 P，令 $\theta = \angle QOP$，则

$$r_{PQ} = |PQ| = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}.$$

点电荷在 P 产生的电势为

$$U(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}.$$

球面平均值为

$$\overline{U_S} = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_S U(P)\,dS.$$

因为 $dS = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$，对 φ 积分给出 2π，于是

$$\overline{U_S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}.$$

令 $u = \cos\theta$，$du = -\sin\theta\,d\theta$，积分化为

$$\overline{U_S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Rau}}.$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Rau}} = \frac{(R+a) - |R-a|}{2Ra}.$$

分两种情况：

- **电荷在球内**：$a < R$，$|R-a| = R-a$，上式等于

$$\frac{(R+a) - (R-a)}{2Ra} = \frac{2a}{2Ra} = \frac{1}{R}.$$

故

$$\overline{U_S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

- **电荷在球外**：$a > R$，$|R-a| = a-R$，上式等于

$$\frac{(R+a) - (a-R)}{2Ra} = \frac{2R}{2Ra} = \frac{1}{a} = \frac{1}{OQ}.$$

故

$$\overline{U_S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,OQ}.$$

1.23

两个分离电荷分布的相互作用能是对称的：

$$W_{\text{int}} = \int \rho_1(\mathbf{r})\, U_2(\mathbf{r})\, d\tau = \int \rho_2(\mathbf{r})\, U_1(\mathbf{r})\, d\tau.$$

算法一（从球壳出发，在点电荷处取值）：

$$W = q\, U_{\text{壳}}(a).$$

算法二（从点电荷出发，在球壳上积分）：

$$W = \iint_{\text{壳}} \sigma\, U_q(\mathbf{r})\, dS = Q \cdot \left\langle U_q \right\rangle_{\text{壳}},$$

其中 $\langle U_q \rangle_{\text{壳}}$ 正是点电荷电势在球壳面上的平均值。

两式相等，消去 $Q \neq 0$ 得

$$\boxed{\langle U_q \rangle_{\text{壳}} = \frac{q}{Q}\, U_{\text{壳}}(a)}.$$