· 《》 p.272

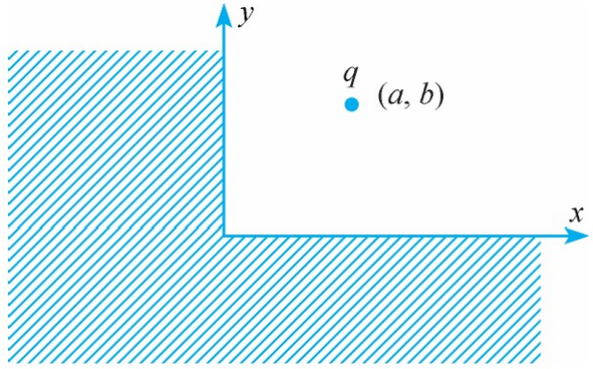
2.22 一电量为 $+q$ 的点电荷位于 $(x,y)=(a,b)$，两半无限接地导体平面相交于 z 轴，如习题 2.22 图所示.

(1) 求 $+q$ 所在区域 $(x,y\geqslant 0,-\infty<z<\infty)$ 中任一点的电场；

(2) 利用 E_y 的表达式，确定哪一个导体平板表面 $E_y=0$，并计算 $E_y\neq 0$ 的导体平板的面电荷密度 σ_e.

· p.70 · 1 / 2 p70:116–335

习题 2.22



习题 2.22 图

用电像法求解. $+q(a,b)$ 的像有三个，各自的电量和位置如下：

$$-q(-a,b),\quad +q(-a,-b),\quad -q(a,-b)$$

在 $x\geq 0$，$y\geq 0$，$-\infty\leq z\leq\infty$ 区域内，电势由原电荷和 3 个像电荷所产生，其表达式为

$$U(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right)$$

· 《》 p.272

2.22 一电量为$+q$的点电荷位于$(x,y)=(a,b)$，两半无限接地导体平面相交于z轴，如习题2.22图所示.

(1) 求$+q$所在区域$(x,y\geqslant 0,-\infty<z<\infty)$中任一点的电场；

(2) 利用E_y的表达式，确定哪一个导体平板表面$E_y=0$，并计算$E_y\neq 0$的导体平板的面电荷密度σ_e.

· p.70 · 2 / 2 p70:335-630

$$\{E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{r_1^3}+\frac{x+a}{r_2^3}-\frac{x-a}{r_3^3}-\frac{x+a}{r_4^3}\right)$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y-b}{r_1^3}+\frac{y+b}{r_2^3}-\frac{y+b}{r_3^3}-\frac{y-b}{r_4^3}\right)$$

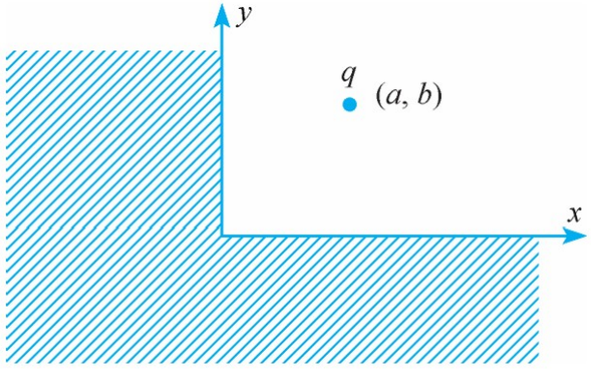
$$E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z}{r_1^3}+\frac{z}{r_2^3}-\frac{z}{r_3^3}-\frac{z}{r_4^3}\right)$$

当$x=0$时，即在竖直导体平面上，有$r_1=r_4$，$r_2=r_3$，$E_y=0$. 当$y=0$时，即在水平导体平面上，有$r_1=r_3$，$r_2=r_4$

$$E_y=\frac{qb}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}-\frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}\right)$$

相应水平导体平面上的面电荷密度为

$$\sigma_e(x,0,z)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_y=-\frac{qb}{2\pi}\left(\frac{1}{[(x-a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}-\frac{1}{[(x+a)^2+b^2+z^2]^{3/2}}\right)$$



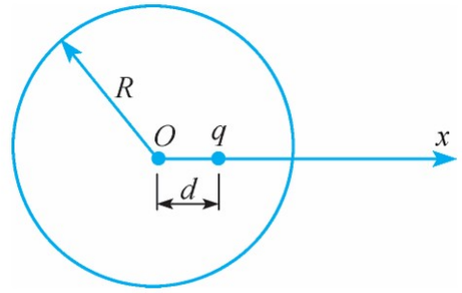
习题 2.22 图

· 《》 p.272

* 2.23 如习题 2.23 图所示，一半径为 R 的导体球壳，球内部距离球心为 $d(d<R)$ 处有一点电荷 q，求：

(1) 当球壳接地时球内的电场强度和电势；

(2) 当球壳不接地且带电量为 Q 时球内的电场强度和电势.



习题 2.23 图

· p.70–71 · 1 / 2 p70:628–800

习题 2.23

(1) 由电像法，球外的像电荷的电量和位置（离球心的距离）为

$$q' = -\frac{R}{d}q, b = \frac{R^2}{d}$$

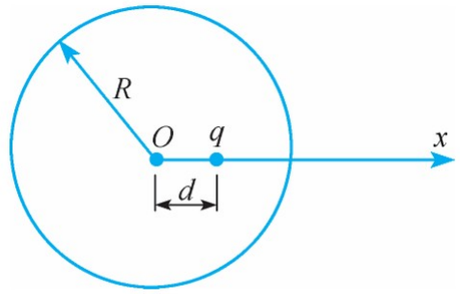
球内的电场强度为点电荷和它的像电荷电场的叠加.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1^2}\boldsymbol{e}_{r1} + \frac{q'}{r_2^2}\boldsymbol{e}_{r2}\right)$$

* 2.23 如习题 2.23 图所示，一半径为 R 的导体球壳，球内部距离球心为 $d(d<R)$ 处有一点电荷 q，求：

(1) 当球壳接地时球内的电场强度和电势；

(2) 当球壳不接地且带电量为 Q 时球内的电场强度和电势.



习题 2.23 图

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left((r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{-1}\boldsymbol{e}_{r1} - \frac{R/d}{r^2+d^2-2rd\cos\theta}\boldsymbol{e}_{r2}\right)$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left((r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{-1/2} - \frac{R/d}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}\right)$$

对于接地导体球壳情况，球壳（内表面）带电量为 $-q$，这一点可通过高斯定理去证明（取球壳外表面为高斯面），也可以通过实际计算（$\boldsymbol{E}_r = -\partial U/\partial r$、$\sigma_e = -\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_r(R)$，将 σ_e 过球壳内表面积分）去证明.

(2) 对于带电球壳的情况，由题设知其带电量为 Q，则可在球壳外表面均匀布满一层虚拟面电荷，其电量设为 $Q' = Q + q$. 这样做的后果是：( ) 球壳总带电量为原带电量 $-q$ 与附加电量 Q' 之和，即 $-q + Q' = Q$，满足题设要求；( ) 对球内电场无贡献；( ) 对球内电势贡献一个常数

$$Q'/(4\pi\varepsilon_0 R) = (Q+q)/(4\pi\varepsilon_0 R)$$

于是，球内电势为前述结果加上这个常数，结果为

$$U_2 = U_1 + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

· 《》 p.273

* 2.24 一半径为 a 的无限长的直导线的线电荷密度为 λ_e，与一电势为零的无限大金属板相距为 b，$b \gg a$，试对单位长度导线计算此系统的电容（提示：用电像法和条件 $b \gg a$）.

· p.71 · 1 / 1 p71:380–658

习题 2.24

取直角坐标，金属板位于 $x=0$ 平面，导线与 z 轴平行，位于 $(x,y)=(b,0)$. 长直导线的像位于 $(x,y)=(-b,0)$，线电荷密度为 $-\lambda_e$. 原直线电荷及其像电荷在 x 轴线上产生的电势为

$$U=-\frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln|b-x|-\frac{-\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln|b+x|=\frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{b+x}{b-x}\right|$$

以上对应取金属板为电势零点. 导线与金属板间的电势差为

$$\Delta U=U(x=b-a)-U(x=0)=\frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2b-a}{a}\right)\approx\frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2b}{a}\right)$$

于是单位长度导线与金属板之间的电容等于

$$C=\frac{\lambda_e}{\Delta U}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{2b}{a}\right)}$$

· 《》 p.273

2.25 一个半径为 R，电量为 Q 的导体球，球外也有一个点电荷 Q，球外点电荷从很远处时的排斥力到靠近导体球附近为吸引力，证明力的零点满足

$$\frac{r}{R}=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\approx 1.618$$

· p.71–72 · 1 / 3 p71:656–800

习题 2.25

由题意，电荷 Q 在导体球外，会在导体球表面激发出不均匀分布的表面电荷. 同时由于导体球本就带总电荷量 Q，因此可以把整个系统分成两部分分析，再叠加起来.

第一部分，点电荷 Q 与像电荷 q'：如下图所示，它们使得导体球表面处电势为 0，并且 $q'=-RQ/r$，$r'=R^2/r$. 根据高斯定理，此不分中导体球表面感应电荷总电量为 $Q_1=q'$.

· 《》 p.273

2.25 一个半径为 R，电量为 Q 的导体球，球外也有一个点电荷 Q，球外点电荷从很远处时的排斥力到靠近导体球附近为吸引力，证明力的零点满足

$$\frac{r}{R}=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\approx 1.618$$

· p.71–72 · 2 / 3 p72:76–296

第二部分，导体球表面均匀带电，总电量 Q_2. 两部分合起来，考虑紧紧包裹着球外侧面的闭合高斯曲面. 因为我们叠加出来的系统与原系统在球外电场应当完全相同，故可知 $Q_1+Q_2=Q$.

由此，就可以分部分计算导体球与点电荷 q 的相互作用力. 合力为

$$F=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{(r-r')^2}+\frac{Q_2}{r^2}\right)$$

根据 $F=0$ 立刻解出

$$\frac{r}{R}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

· 《》 p.273

* 2.26 两个半径为 R 的相同导体球，带相同的电量 Q，两者球心距离为 d，且 $d \gg R$，求他们之间的作用力的一阶近似.

· p.72 · 1 / 1 p72:400–664

习题 2.26

本题题意是，相互作用力保留到 R/d 的首非零阶，因此我们可以做个估计，即，只需要分析 Q 在对方带导体球面上激发感应电荷所等效的一阶电像就够用了；至于感应电荷再在另一方激发的感应电荷（二阶电像）就不用考虑.

经过如此分析，系统即为：两导体球分别均匀带电 $Q-q'$，同时在球心连线上，距离各自球心 $r=R^2/d$ 处，分别有像电荷 $q'=-RQ/d$. 总系统一共有三套库仑力，分别是：1）均匀电荷-均匀电荷；2）像电荷-均匀电荷；3）像电荷-像电荷. 总近似库仑力为

$$F=\frac{(Q-q')^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}+2\frac{Qq'}{4\pi\varepsilon_0(d-r)^2}+\frac{q'^2}{4\pi\varepsilon_0(d-2r)^2}$$

展开计算得，含 R 的最低阶项为 R^3/d^5 项，从而

$$F=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}-\frac{Q^2R^3}{\pi\varepsilon_0 d^5}$$

· 《》 p.273

* 2. 27　两个半径均为 R 的导体球相切，证明等效电容 $C = 8\pi\varepsilon_0 R\ln 2$.

· p.72–73 · 1 / 4 p72:662–800

习题 2.27

根据镜像法，首先在两球心处虚设一对点电荷华，其电量为 $q_1 = 4\pi\varepsilon_0 RU_0$ 于是每个 q_1 在自己的球面上产生的电势为的 U_0，但 q_1 还将在对方球面上产生附加电势. 为了消除此附加电势，需在对方球内 b_2 处虚设第二对点电荷 q_2，即

$$q_2 = -\frac{R}{2R}q_1$$

· 《》 p.273

* 2. 27　两个半径均为 R 的导体球相切，证明等效电容 $C = 8\pi\varepsilon_0 R\ln 2$.

· p.72–73 · 2 / 4 p73:76–278

q_2 与球心的距离 b_2 为

$$b_2 = \frac{R^2}{2R}$$

这样，左球心的 q_1 与右球 b_2 处的 q_2 在右球面上的电势为零. 但这一对 q_2 又会在原球面上引起附加电势，为了消除这一附加电势，又需在两球内引入第三对虚设的点电荷 q_3，与各自所在球的球心相距为 b_3，以此类推. 有递推公式

$$q_n = -\frac{R}{2R - b_{n-1}} q_{n-1} \tag{2.1}$$

$$b_n = \frac{R^2}{2R - b_{n-1}} \tag{2.2}$$

· 《》 p.273

* 2. 27　两个半径均为 R 的导体球相切，证明等效电容 $C = 8\pi\varepsilon_0 R\ln 2$.

· p.72–73 · 3 / 4 p73:278–471

两式相除得到一个更加简洁的递推式，我们将使用这个式子以及上两式中的后者求出通项（选对递推式很重要）

$$b_n = \frac{-Rq_n}{q_{n-1}}$$

同理

$$b_{n-1} = \frac{-Rq_{n-1}}{q_{n-2}}$$

把这两式带入(2.2)式，整理得

$$\frac{1}{q_n} + \frac{2}{q_{n-1}} + \frac{2}{q_{n-2}} = 0$$

· 《》 p.273

* 2. 27　两个半径均为 R 的导体球相切，证明等效电容 $C = 8\pi\varepsilon_0 R\ln 2$.

· p.72–73 · 4 / 4 p73:471–632

根据数列知识，可以解出

$$q_n = (-1)^{n+1}\frac{q_1}{n}$$

当孤立导体的电势准确地达到 U_0 时，表面的总电量 Q 即为这 n 对（$n \to \infty$）虚设点电荷的电量之和，即

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} 2q_n = 2q_1 \ln 2$$

电容为 $C = Q/U_0 = 8\pi\varepsilon_0 R U_0 \ln 2.$

· 《》 p.273

3.1 在铀238(^{238}U)的原子核中，两质子间的距离约为6.0×10^{-15}m. 已知质子电荷为1.6×10^{-19}C，问它们之间的电势能有多少？相互作用的库仑力有多大？

· p.74 · 1 / 1 p74:75–216

习题 3.1

两质子之间的电势能或相互作用能 W，以及库仑力 F 分别等于

$$F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}=\frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{(6\times10^{-15})^2}=6.4\ (\mathrm{N})$$

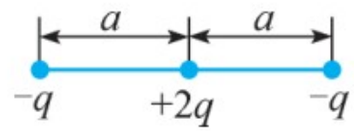
$$W=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}=\frac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{6\times10^{-15}}\approx3.84\times10^{-14}\ (\mathrm{J})$$

· 《》 p.273

3.2 三个点电荷，其所带电量及位置如习题 3.2 图所示，计算：

(1) 各对电荷之间的相互作用能；

(2) 电荷系统的相互作用能.



· p.74 · 1 / 1 p74:214–433

习题 3.2

(1) 自左至右将点电荷排序，求得各对电荷之间的相互作用能依次为

$$W_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{(-q)\cdot 2q}{4\pi\varepsilon_0 a}=-\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}=W_{21}$$

$$W_{23}=\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{2q\cdot(-q)}{4\pi\varepsilon_0 a}=-\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}=W_{32}$$

$$W_{13}=\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2a}=\frac{(-q)\cdot(-q)}{8\pi\varepsilon_0 a}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}=W_{31}$$

(2) 电荷系统的相互作用能等于上述三对电荷相互作用能之和，即

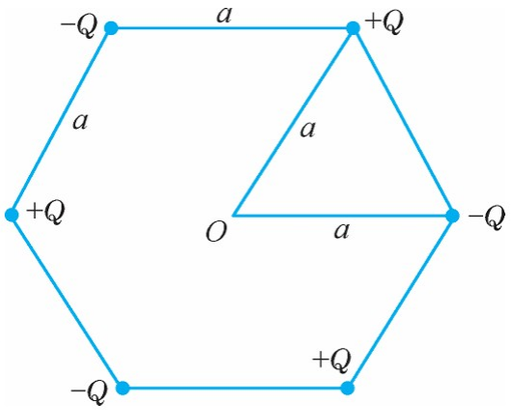
$$W=W_{12}+W_{23}+W_{13}=-\frac{7q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

· 《》 p.273

3.3 在边长为 a 的正六边形各顶点有固定的点电荷，它们的电量交替为 Q 和 $-Q$，参见习题 3.3 图.

(1) 求系统的相互作用能；

(2) 若外力将其中相邻的两个点电荷缓慢地移到无限远处，在移动过程中维持这两个点电荷的距离以及其余电荷的位置不变，问外力需做多少功？



习题 3.3 图

· p.74–75 · 1 / 3 p74:431–666

习题 3.3

(1) 系统的相互作用能等于

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i$$

式中，U_i 为除 q_i 外其余所有点电荷在 q_i 处产生的电势. 由对称性，可知所有正电荷所在位置的 U_i 彼此相等，设为 U_+，其值等于

$$U_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{a} + \frac{Q}{\sqrt{3}a} - \frac{Q}{2a} + \frac{Q}{\sqrt{3}a} - \frac{Q}{a}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{5}{2}\right)$$

此外，所有负电荷所在位置的 U_i 也彼此相等，设为 U_-，成立 $U_- = -U_+$. 系统共包含 3 个正电荷和 3 个负电荷，以至该系统的相互作用能等于

$$W = \frac{3}{2}QU_+ - \frac{3}{2}QU_- = 3QU_+ = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{5}{2}\right)$$

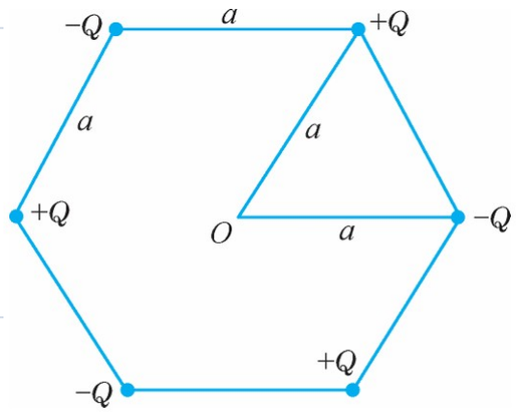
· 《》 p.273

3.3 在边长为 a 的正六边形各顶点有固定的点电荷，它们的电量交替为 Q 和 $-Q$，参见习题 3.3 图.

(1) 求系统的相互作用能；

(2) 若外力将其中相邻的两个点电荷缓慢地移到无限远处，在移动过程中维持这两个点电荷的距离以及其余电荷的位置不变，问外力需做多少功？

· p.74–75 · 2 / 3 p74:666-800



习题 3.3 图

(2) 在移走两个相邻点电荷之后，余下四个点电荷构成的系统的相互作用能为

$$W_1 = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{a}+\frac{Q}{\sqrt{3}a}-\frac{Q}{2a}\right)-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}+\frac{Q}{a}-\frac{Q}{\sqrt{3}a}\right)$$
$$+\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{a}-\frac{Q}{a}+\frac{Q}{\sqrt{3}a}\right)-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}-\frac{Q}{\sqrt{3}a}+\frac{Q}{2a}\right)$$
$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\right)+2\left(-2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{7}{2}\right)$$

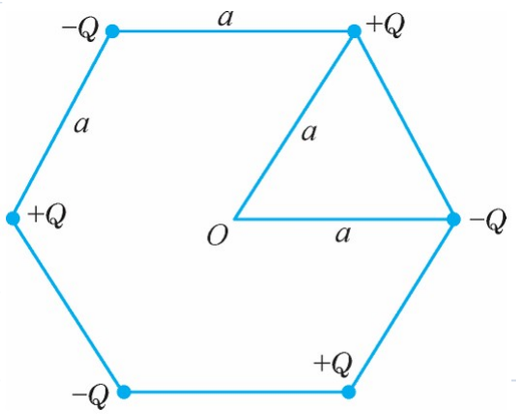
· 《》 p.273

3.3 在边长为 a 的正六边形各顶点有固定的点电荷，它们的电量交替为 Q 和 $-Q$，参见习题 3.3 图.

(1) 求系统的相互作用能；

(2) 若外力将其中相邻的两个点电荷缓慢地移到无限远处，在移动过程中维持这两个点电荷的距离以及其余电荷的位置不变，问外力需做多少功？

· p.74–75 · 3 / 3 p75:76–250



习题 3.3 图

被移至无限远处的点电荷对的相互作用能等于

$$W_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

外力做功等于系统相互作用能的增加，亦即

$$A = W_1 + W_2 - W = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{7}{2} - 1 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{15}{2}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

反馈意见

· 《》 p.273

3.4 假定电子是球形的，并且电子的静止能量 mc^2（m 是电子的静质量，c 是真空中光速）就是来自电子的静电能量，这样就可以由电子的电荷分布算出电子的半径来.
(1) 假定电子电荷 e 均匀分布在球面上，求电子的半径；
(2) 假定电子电荷 e 均匀分布在球体内，求电子的半径；
(3) 由于假定电荷分布情况不同，算出的电子半径便稍有不同. 目前把 $r_0=e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)$ 称为电子的经典半径. 已知电子电荷 $e=-1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，电子的静质量 $m=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，光速 $c=3.0\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求 r_0 的值.

· p.76 · 1 / 3 p76:120–417

3.4

解：(1) 若电子电荷沿半径为 a 的球面均匀分布，则球面上的电势为

$$U=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

电子的静电势能

$$W=\frac{1}{2}eU=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

令该能量等于电子的静止能量 mc^2，即

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}=mc^2$$

解得

$$a=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

(2) 若电荷均匀分布在半径为 a 的球体内，电荷密度为

· 《》 p.273

3.4 假定电子是球形的，并且电子的静止能量 mc^2（m 是电子的静质量，c 是真空中光速）就是来自电子的静电能量，这样就可以由电子的电荷分布算出电子的半径来.

(1) 假定电子电荷 e 均匀分布在球面上，求电子的半径；

(2) 假定电子电荷 e 均匀分布在球体内，求电子的半径；

(3) 由于假定电荷分布情况不同，算出的电子半径便稍有不同. 目前把 $r_0=e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)$ 称为电子的经典半径. 已知电子电荷 $e=-1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，电子的静质量 $m=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，光速 $c=3.0\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求 r_0 的值.

· p.76 · 2 / 3 p76:417–597

$$\rho=\frac{3e}{4\pi a^3}$$

由高斯定理，球内外的电场强度分别为

$$\mathbf{E}(r<a)=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathbf{e}_r=\frac{er}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\mathbf{e}_r,\qquad \mathbf{E}(r>a)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r$$

球内电势分布为

$$U(r)=\int_r^\infty \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=\int_r^a \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 a^3}dr+\int_a^\infty \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{e(3a^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 a^3}$$

· 《》 p.273

3.4 假定电子是球形的，并且电子的静止能量 mc^2（m 是电子的静质量，c 是真空中光速）就是来自电子的静电能量，这样就可以由电子的电荷分布算出电子的半径来.

(1) 假定电子电荷 e 均匀分布在球面上，求电子的半径；

(2) 假定电子电荷 e 均匀分布在球体内，求电子的半径；

(3) 由于假定电荷分布情况不同，算出的电子半径便稍有不同. 目前把 $r_0=e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)$ 称为电子的经典半径. 已知电子电荷 $e=-1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，电子的静质量 $m=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，光速 $c=3.0\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求 r_0 的值.

· p.76 · 3 / 3 p76:597-800

电子的静电势能为

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V \rho U\,dV=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{3e}{4\pi a^3}\cdot\frac{e(3a^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 a^3}\cdot 4\pi r^2 dr=\frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

令 $W=mc^2$，得

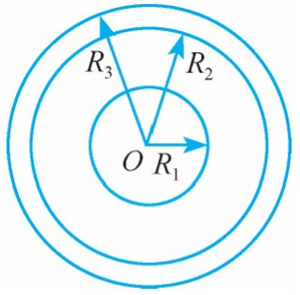
$$a=\frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 mc^2}$$

(3) 电子经典半径

$$r_0=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}=\frac{10^{-7}\times(1.6\times10^{-19})^2}{9.11\times10^{-31}}=2.8\times10^{-15}\,\mathrm{m}$$

· 《》 p.274

3.5 如习题 3.5 图所示，半径为 $R_1 = 2.0\text{cm}$ 的导体球外套一个与它同心的导体球壳，壳的内、外半径分别为 $R_2 = 4.0\text{cm}$ 和 $R_3 = 5.0\text{cm}$，球与壳间充满空气，壳外也是空气，球和壳原来都不带电. 现在使球带电 $3.0\times10^{-8}\text{C}$，问这个系统储藏了多少电能？如果用导线把球与壳连在一起，结果如何？



习题 3.5 图

· p.77 · 1 / 2 p77:76-352

3.5

解：球带电后，壳内壁感应电荷 $-Q$ 均匀分布，壳外表面带电 $+Q$ 均匀分布. 系统总储能为球形电容器储能与孤立导体球储能之和：

$$W = \frac{Q^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2}$$

其中

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_3$$

代入得

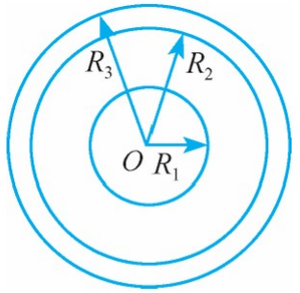
$$W = \frac{(R_2 - R_1)Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1 R_2} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

代入数值 $Q = 3.0\times10^{-8}\,\text{C}$，$R_1 = 0.02\,\text{m}$，$R_2 = 0.04\,\text{m}$，$R_3 = 0.05\,\text{m}$，$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\text{F/m}$，得

$$W = \frac{(3\times10^{-8})^2}{8\times\pi\times8.85\times10^{-12}}\times\left(\frac{1}{0.02} - \frac{1}{0.04} + \frac{1}{0.05}\right) = 1.82\times10^{-4}\,\text{J}$$

· 《》 p.274

3.5 如习题 3.5 图所示，半径为 $R_1 = 2.0\text{cm}$ 的导体球外套一个与它同心的导体球壳，壳的内、外半径分别为 $R_2 = 4.0\text{cm}$ 和 $R_3 = 5.0\text{cm}$，球与壳间充满空气，壳外也是空气，球和壳原来都不带电. 现在使球带电 $3.0\times10^{-8}\text{C}$，问这个系统储藏了多少电能？如果用导线把球与壳连在一起，结果如何？



习题 3.5 图

· p.77 · 2 / 2 p77:352-425

用导线连接球与壳后，系统相当于半径为 R_3 的孤立导体球，储能为

$$W' = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{(3\times10^{-8})^2}{8\times\pi\times8.85\times10^{-12}\times0.05} = 8.09\times10^{-5}\,\text{J}$$

· 《》 p.274

3.6 铀 235 原子核可当成半径 $r=9.2\times10^{-15}\,\mathrm{m}$ 的球，它有 92 个质子，每个质子的电荷为 $e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$. 假设这些电荷均匀分布在上述球体内.

(1) 求铀 235 原子核的静电势能；

(2) 当一个铀 235 原子核分裂成两个相同的碎片，每个都可当成均匀带电球时，求放出的能量；

(3) 1kg 铀 235 裂变时，能放出多少能量？

· p.77 · 1 / 2 p77:423–701

3.6

解：由习题 3.4 结果，半径为 r、电量为 Q 的均匀带电球的静电能为

$$W=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 r}$$

(1) 铀 235 原子核的静电势能

$$W_1=\frac{3\times(92\times1.6\times10^{-19})^2}{20\times\pi\times8.85\times10^{-12}\times9.2\times10^{-15}}=1.27\times10^{-10}\,\mathrm{J}=795\,\mathrm{MeV}$$

(2) 分裂后每个碎片的电量为 $Q/2$，半径由体积相等确定：

$$2\times\frac{4\pi}{3}r_1^3=\frac{4\pi}{3}r^3\quad\Rightarrow\quad r_1=\frac{r}{2^{1/3}}$$

放出的能量为

$$\Delta W=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 r}-2\times\frac{3(Q/2)^2}{20\pi\varepsilon_0 r_1}=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 r}\left(1-2^{-2/3}\right)=4.70\times10^{-11}\,\mathrm{J}=294\,\mathrm{MeV}$$

(3) 1 kg 铀 235 的原子核数目为

· 《》 p.274

3.6 铀 235 原子核可当成半径 $r=9.2\times10^{-15}$ m 的球，它有 92 个质子，每个质子的电荷为 $e=1.6\times10^{-19}$ C. 假设这些电荷均匀分布在上述球体内.

(1) 求铀 235 原子核的静电势能；

(2) 当一个铀 235 原子核分裂成两个相同的碎片，每个都可当成均匀带电球时，求放出的能量；

(3) 1kg 铀 235 裂变时，能放出多少能量?

· p.77 · 2 / 2 p77:701-800

$$N=\frac{1}{235\times1.66\times10^{-27}}=2.56\times10^{24}$$

总放出的能量

$$\Delta W_{总}=N\times\Delta W=2.56\times10^{24}\times4.70\times10^{-11}=1.2\times10^{14}\,\mathrm{J}$$

· 《》 p.274

3.7 半径为 a 的导体圆柱外套有一个半径为 b 的同轴导体圆筒，长度都是 l，其间充满介电常量为 ε 的均匀介质，圆柱带电量为 Q，圆筒带电量为 $-Q$，略去边缘效应.

(1) 在半径为 $r(a<r<b)$ 处，电场能量密度是多少？

(2) 整个介质内的电场总能量 W 是多少？

(3) 试证明：$W=Q^2/(2C)$，C 是圆柱和圆筒间的电容.

· p.78 · 1 / 2 p78:76-344

3.7

解：(1) 由对称性和高斯定理，在 $a<r<b$ 区域内，电位移矢量和电场强度的大小分别为

$$D=\frac{Q}{2\pi rl},\quad E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon rl}$$

电场能量密度为

$$w=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{2\pi rl}\cdot\frac{Q}{2\pi\varepsilon rl}=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2l^2}$$

(2) 介质内的总电场能为

$$W=\iiint w\,dV=\int_a^b\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2l^2}\cdot 2\pi rl\,dr=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\int_a^b\frac{dr}{r}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$$

(3) 两极板间的电势差为

$$\Delta U=\int_a^b E\,dr=\int_a^b\frac{Q}{2\pi\varepsilon rl}dr=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$$

· 《》 p.274

3.7 半径为 a 的导体圆柱外套有一个半径为 b 的同轴导体圆筒，长度都是 l，其间充满介电常量为 ε 的均匀介质，圆柱带电量为 Q，圆筒带电量为 $-Q$，略去边缘效应.

(1) 在半径为 $r(a<r<b)$ 处，电场能量密度是多少？

(2) 整个介质内的电场总能量 W 是多少？

(3) 试证明：$W=Q^2/(2C)$，C 是圆柱和圆筒间的电容.

· p.78 · 2 / 2 p78:344-495

电容为

$$C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}$$

于是

$$\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{\ln(b/a)}{2\pi\varepsilon l}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}=W$$

证毕.

· 《》 p.274

3.8 圆柱形电容器由一根长直导线和套在它外面的共轴导体圆筒构成. 设导线的半径为 a, 圆筒的内半径为 b. 证明: 电容器所存储的能量有一半是在半径为 $r=(ab)^{1/2}$ 的圆柱体内.

· p.78 · 1 / 1 p78:476–800

3.8

证: 由习题 3.7, 半径为 r 以内的能量为

$$W(r)=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r}{a}$$

电容器总能量为

$$W=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

令 $W(r)=\frac{1}{2}W$, 得

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r}{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

即

$$\ln\frac{r}{a}=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}=\ln\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}$$

所以

$$\frac{r}{a}=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\quad\Rightarrow\quad r=\sqrt{ab}$$

证毕.

· 《》 p.274

3.9 由两共轴金属圆柱构成一空气电容器，设空气击穿场强为 E_b，内外导体圆柱半径为 R_1、R_2，导体单位长度带电量为 λ_e. 在给定 R_2 和保证空气介质不致击穿的前提下，应当如何选择 R_1，使得

(1)两导体间的电势差最大?

(2) 电容器的储能最大?

(3) 当空气击穿的场强 $E_b=3\times10^6\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$、$R_2=1\mathrm{cm}$ 时，分别计算在(1)和(2)两种选择方案下电容器的极大电势差.

· p.79 · 1 / 3 p79:79–322

3.9

解：由高斯定理，圆柱形电容器内电场分布为

$$E=\frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

内导体表面电场强度最大，要求

$$E_{\max}=\frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0 R_1}\le E_b$$

取等号时 $\lambda_e=2\pi\varepsilon_0 E_b R_1$. 两极板间电势差为

$$U=\int_{R_1}^{R_2}E\,dr=\frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}=E_bR_1\ln\frac{R_2}{R_1}$$

· 《》 p.274

3.9 由两共轴金属圆柱构成一空气电容器，设空气击穿场强为 E_b，内外导体圆柱半径为 R_1、R_2，导体单位长度带电量为 λ_e. 在给定 R_2 和保证空气介质不致击穿的前提下，应当如何选择 R_1，使得

(1)两导体间的电势差最大?

(2) 电容器的储能最大?

(3) 当空气击穿的场强 $E_b=3\times10^6\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$、$R_2=1\mathrm{cm}$ 时，分别计算在(1)和(2)两种选择方案下电容器的极大电势差.

· p.79 · 2 / 3 p79:322-641

单位长度储能为

$$W=\frac{\lambda_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}=\pi\varepsilon_0E_b^2R_1^2\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(1) 求 U 的极值：令 $\frac{dU}{dR_1}=0$，得

$$\frac{d}{dR_1}\left(E_bR_1\ln\frac{R_2}{R_1}\right)=E_b\left(\ln\frac{R_2}{R_1}-1\right)=0$$

解得 $\ln\frac{R_2}{R_1}=1$，即 $R_1=\frac{R_2}{e}$，最大电势差为

$$U_{\max}=E_b\cdot\frac{R_2}{e}\cdot1=\frac{E_bR_2}{e}$$

(2) 求 W 的极值：令 $\frac{dW}{dR_1}=0$，得

$$\frac{d}{dR_1}\left(\pi\varepsilon_0E_b^2R_1^2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)=\pi\varepsilon_0E_b^2\left(2R_1\ln\frac{R_2}{R_1}-R_1\right)=0$$

解得 $\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{1}{2}$，即 $R_1=\frac{R_2}{\sqrt{e}}$，最大储能为

· 《》 p.274

3.9 由两共轴金属圆柱构成一空气电容器，设空气击穿场强为 E_b，内外导体圆柱半径为 R_1、R_2，导体单位长度带电量为 λ_e. 在给定 R_2 和保证空气介质不致击穿的前提下，应当如何选择 R_1，使得

(1)两导体间的电势差最大?

(2) 电容器的储能最大?

(3) 当空气击穿的场强 $E_b=3\times10^6\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$、$R_2=1\mathrm{cm}$ 时，分别计算在(1)和(2)两种选择方案下电容器的极大电势差.

· p.79 · 3 / 3 p79:641-800

$$W_{\max}=\pi\varepsilon_0E_b^2\cdot\frac{R_2^2}{e}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi\varepsilon_0E_b^2R_2^2}{2e}$$

相应电势差为

$$U_{\max}=E_b\cdot\frac{R_2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{E_bR_2}{2\sqrt{e}}$$

(3) 代入数值 $E_b=3\times10^6\,\mathrm{V/m}$，$R_2=0.01\,\mathrm{m}$，$e=2.718$，得第一种方案：$U_{\max}=\frac{3\times10^6\times0.01}{2.718}=1.1\times10^4\,\mathrm{V}$ 第二种方案：$U_{\max}=\frac{3\times10^6\times0.01}{2\times\sqrt{2.718}}=9.1\times10^3\,\mathrm{V}$

· 《》 p.274

3.10 一球形电容器，内球壳的外半径为 R_1，带电量为 Q；外球壳的内半径为 R_2，带电量为 $-Q$. 求：

(1)二球壳各自的自能；

(2)二球壳之间的互能；

(3)系统的总能量.

· p.80 · 1 / 2 p80:79–406

3.10

解：(1) 内球壳在其自身产生的电势为 $U_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$，自能为

$$W_{自}(+Q) = \frac{1}{2}QU_1 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

外球壳在其自身产生的电势为 $U_2 = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$，自能为

$$W_{自}(-Q) = \frac{1}{2}(-Q)U_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$$

(2) 内球壳电荷 Q 在外球壳处产生的电势为 $U_{12} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$，外球壳电荷 $-Q$ 在内球壳处产生的电势为 $U_{21} = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$，互能可表示为

$$W_{互} = QU_{12} = (-Q)U_{21} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

(3) 系统总能量为自能与互能之和

$$W = W_{自}(+Q) + W_{自}(-Q) + W_{互} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

· 《》 p.274

3.10 一球形电容器，内球壳的外半径为 R_1，带电量为 Q；外球壳的内半径为 R_2，带电量为 $-Q$. 求：

(1)二球壳各自的自能；

(2)二球壳之间的互能；

(3)系统的总能量.

· p.80 · 2 / 2 p80:406–519

也可直接用电容公式验证：球形电容 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1}$，则

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{R_2-R_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

结果一致.

· 《》 p.274

* 3.11 长为 L 的圆柱形电容器由半径为 a 的内芯导线与半径为 b 的外部导体薄壳所组成，其间填满了介电常量为 ε 的电介质. 把电容器与电势为 V 的电池相连接，并将电介质从电容器中拉出一部分. 当不计边缘效应时，要维持电介质在拉出位置不动，需施多大的力？此力沿何方向？

· p.80 · 1 / 1 p80:519–800

3.11

解：圆柱形电容器电容为 $C=\dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}$. 设介质拉出的长度为 x，则系统可视为两个圆柱形电容器的并联：长度为 x 的不含介质部分和长度为 $l-x$ 的含介质部分，总电容为

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln(b/a)}+\frac{2\pi\varepsilon(l-x)}{\ln(b/a)}=\frac{2\pi[\varepsilon l-(\varepsilon-\varepsilon_0)x]}{\ln(b/a)}$$

电容器与电池相连，电压 V 保持不变. 介质柱所受的电场力为

$$F=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_V=\frac{V^2}{2}\frac{dC}{dx}=\frac{V^2}{2}\cdot\frac{-2\pi(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\ln(b/a)}=-\frac{\pi(\varepsilon-\varepsilon_0)V^2}{\ln(b/a)}$$

负号表示电场力为吸引力，方向沿轴线指向电容器内部. 要维持介质在拉出位置不动，需施加拉力

$$F_{外}=\frac{\pi(\varepsilon-\varepsilon_0)V^2}{\ln(b/a)}$$

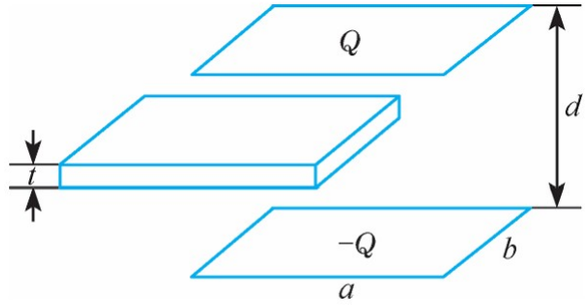
方向朝外.

· 《》 p.274

* 3.12 如习题 3.12 图所示，一平行板电容器的两极板都是长为 a 宽为 b、面积为 $S=ab$ 的长方形金属片，两片相距为 d，分别带有电荷 Q 和 $-Q$. 一块厚为 t、相对介电常量为 ε_r 的均匀介质片（面积和宽度都与极板相同）平行地放在两极板间，并沿着长度方向部分抽出. 略去边缘效应，证明：当介质片在极板间的长度为 x 时，把它拉向原来位置的静电力为

$$F=\frac{Q^2b(d-t')t'd}{2\varepsilon_0[S(d-t')+xbt']^2}$$

式中，$t'=(\varepsilon_r-1)t/\varepsilon_r$.



习题 3.12 图

· p.81 · 1 / 2 p81:79-291

3.12

解：系统可视为两个平行板电容器的并联. 一部分面积为 $b(a-x)$，不含介质，电容为

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 b(a-x)}{d}$$

另一部分面积为 bx，含有厚度为 t、相对介电常量为 ε_r 的介质板，其电容等效为三个电容的串联，结果为

$$C_2=\frac{\varepsilon_0 bx}{d-t'},\quad \text{其中}t'=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t$$

系统总电容为

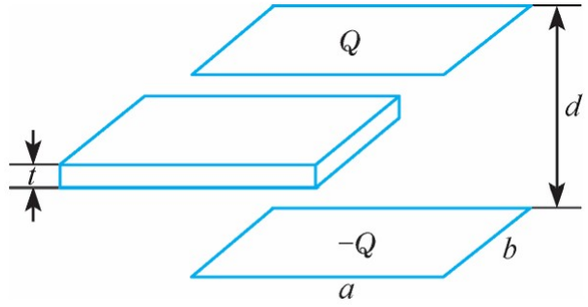
$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_0 b(a-x)}{d}+\frac{\varepsilon_0 bx}{d-t'}=\frac{\varepsilon_0 b[(d-t')a+xt']}{d(d-t')}$$

· 《》 p.274

* 3.12 如习题 3.12 图所示，一平行板电容器的两极板都是长为 a 宽为 b、面积为 $S=ab$ 的长方形金属片，两片相距为 d，分别带有电荷 Q 和 $-Q$. 一块厚为 t、相对介电常量为 ε_r 的均匀介质片（面积和宽度都与极板相同）平行地放在两极板间，并沿着长度方向部分抽出. 略去边缘效应，证明：当介质片在极板间的长度为 x 时，把它拉向原来位置的静电力为

$$F=\frac{Q^2b(d-t')t'd}{2\varepsilon_0[S(d-t')+xbt']^2}$$

式中，$t'=(\varepsilon_r-1)t/\varepsilon_r$.



习题 3.12 图

· p.81 · 2 / 2 p81:291-489

电容器带电量 Q 保持不变. 介质板所受的静电力为

$$F=-\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q=\frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}$$

计算导数

$$\frac{dC}{dx}=\frac{\varepsilon_0bt'}{d(d-t')}$$

代入得

$$F=\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{d^2(d-t')^2}{\varepsilon_0^2b^2[(d-t')a+xt']^2}\cdot\frac{\varepsilon_0bt'}{d(d-t')}=\frac{Q^2b(d-t')t'd}{2\varepsilon_0[S(d-t')+xbt']^2}$$

其中 $S=ab$. 力为正，指向 x 增加的方向，即把介质板拉回原来位置. 证毕.

· 《》 p.275

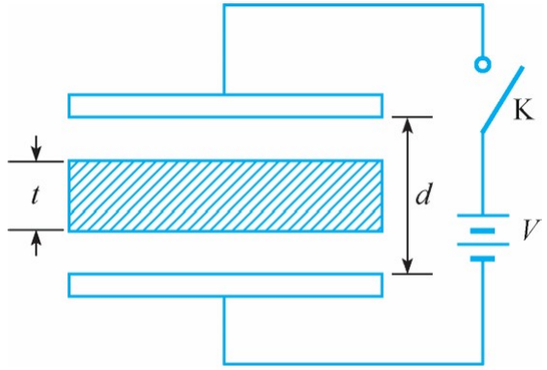
* 3.13 如习题 3.13 图所示，一平行板电容器极板的面积为 S，极板间距离为 d，在它中间有一块厚为 t、相对介电常量为 ε_r 的介质平板，把两极板充电到电势差为 V. 略去边缘效应.

(1) 断开电源，把介质板抽出，问抽出时要做多少功?

(2) 如果在不断开电源的情况下抽出，则要做多少功?

(3) 如果将中间的介质板换上同样厚的导体板，结果又如何?

· p.81 · 1 / 1 p81:489-800



习题 3.13 图

3.13

解：系统的初始电容等效于两个电容器的串联：

$$C_0=\left(\frac{t}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}+\frac{d-t}{\varepsilon_0 S}\right)^{-1}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{t+\varepsilon_r(d-t)}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t'},\quad t'=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t$$

抽出介质后电容变为 $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$. 初始充电至电压 V，极板带电量 $Q=C_0V$.

(1) 断开电源，电量 Q 不变. 外界克服静电力做功等于静电能增量：

$$A_1=\frac{Q^2}{2C}-\frac{Q^2}{2C_0}=\frac{Q^2}{2}\left(\frac{d}{\varepsilon_0 S}-\frac{d-t'}{\varepsilon_0 S}\right)=\frac{t'Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\varepsilon_0 S t' V^2}{2(d-t')^2}$$

(2) 接通电源，电压 V 不变. 外界做功等于静电能减少量（因为电池吸收能量）：

$$A_2=\frac{C_0V^2}{2}-\frac{CV^2}{2}=\frac{V^2}{2}(C_0-C)=\frac{V^2}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d-t'}-\frac{\varepsilon_0 S}{d}\right)=\frac{\varepsilon_0 S t' V^2}{2(d-t')d}$$

(3) 将介质板换为导体板，可视为 $\varepsilon_r\to\infty$，此时 $t'\to t$. 代入得

$$A_1=\frac{\varepsilon_0 S t V^2}{2(d-t)^2},\quad A_2=\frac{\varepsilon_0 S t V^2}{2(d-t)d}$$

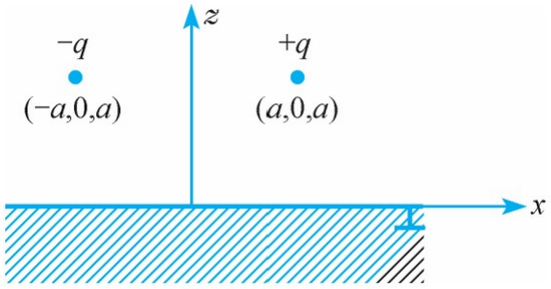
· 《》 p.275

* 3.14 如习题 3.14 图所示，在接地导体 $z=0$ 平面的上方 $(x,y,z)=(a,0,a)$ 和 $(-a,0,a)$ 处分别有点电荷 $+q$ 和 $-q$.

(1) 求作用在 $+q$ 上的作用力；

(2) 为了得到这样一个电荷系统，求反抗静电力所做的功；

(3) 求点 $(a,0,0)$ 处的电荷面密度.



习题 3.14 图

· p.82 · 1 / 2 p82:79–377

3.14

解：(1) 用电像法，在 $(-a,0,-a)$ 处置像电荷 $+q$，在 $(a,0,-a)$ 处置像电荷 $-q$. 作用在 $(a,0,a)$ 处点电荷 $+q$ 上的力来自三个像电荷：

$$\mathbf{F}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(2a)^2}\mathbf{e}_x-\frac{1}{(2a)^2}\mathbf{e}_z+\frac{1}{(2\sqrt{2}a)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_x+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_z\right)\right]$$

$$=\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_x+\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_z\right]$$

力的大小为

$$F=\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot\sqrt{2}\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{(2\sqrt{2}-1)q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$$

方向在 xz 平面内指向原点.

(2) 沿路径 $z=x, y=0$ 同时移动两个电荷，静电力与位移方向相同. 外界克服静电力做功

$$A=-2\int_{\infty}^{\sqrt{2}a}F\,dl=\int_a^{\infty}\frac{(2\sqrt{2}-1)q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot\sqrt{2}dx=\frac{(4-\sqrt{2})q^2}{16\pi\varepsilon_0}\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{(4-\sqrt{2})q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

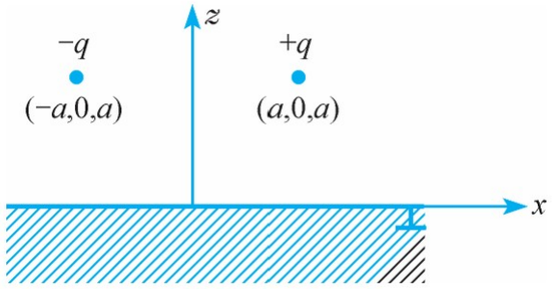
· 《》 p.275

* 3.14 如习题 3.14 图所示，在接地导体 $z=0$ 平面的上方 $(x,y,z)=(a,0,a)$ 和 $(-a,0,a)$ 处分别有点电荷 $+q$ 和 $-q$.

(1) 求作用在 $+q$ 上的作用力；

(2) 为了得到这样一个电荷系统，求反抗静电力所做的功；

(3) 求点 $(a,0,0)$ 处的电荷面密度.



习题 3.14 图

· p.82 · 2 / 2 p82:377-612

(3) 在点 $(a,0,0)$ 处，原电荷 $+q$ 与像电荷 $-q$ 产生的电场只有 z 分量：

$$E_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+a^2)^{3/2}}\cdot 2a\cdot \mathbf{e}_z = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\mathbf{e}_z$$

原电荷 $-q$ 与像电荷 $+q$ 产生的电场：

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(4a^2+a^2)^{3/2}}\cdot 2a\cdot \mathbf{e}_z = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2\cdot 5\sqrt{5}}\mathbf{e}_z$$

总电场

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{5\sqrt{5}} - 1\right)\mathbf{e}_z$$

面电荷密度

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{q}{2\pi a^2}\left(\frac{1}{5\sqrt{5}} - 1\right)$$

· 《》 p.275

* 3.15 将一个半径为 a、带电量为 q 的导体球放入均匀电场 E_0 中，求：

(1) 感应后球的偶极矩；

(2) 球内外的电势；

(3) 感应电偶极矩所对应的球面电荷分布的静电自能.

· p.82–83 · 1 / 3 p82:612–800

3.15

解：(1) 设球本身电量为零，只考虑外电场 $\mathbf{E}_0$ 与球面感应电荷的电场. 取球坐标，z 轴沿 $\mathbf{E}_0$ 方向. 外电场对应的电势为 $-E_0 r\cos\theta$. 设感应电荷产生的电势为偶极子场 $\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，则球外电势为

$$U = U_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

在球面 $r = a$ 上电势应为常数，故 $\cos\theta$ 项系数为零：

$$-E_0 a + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0$$

· 《》 p.275

* 3.15 将一个半径为 a、带电量为 q 的导体球放入均匀电场 E_0 中，求：

(1) 感应后球的偶极矩；

(2) 球内外的电势；

(3) 感应电偶极矩所对应的球面电荷分布的静电自能.

· p.82–83 · 2 / 3 p83:76–325

因此球的偶极矩为 $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0$.

(2) 球外电势为

$$U_{外} = U_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - E_0 r\cos\theta + \frac{a^3 E_0 \cos\theta}{r^2}$$

球内电势为常数，等于球面处的电势. 球面带电量 q 均匀分布时，在球面产生电势 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$，故

$$U_{内} = U_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

(3) 感应电荷面密度可由球面内外电场径向分量之差求得. 球面外侧径向电场为

$$E_{r2} = -\left.\frac{\partial U_{外}}{\partial r}\right|_{r=a} = E_0\cos\theta + \frac{2a^3 E_0\cos\theta}{a^3} = 3E_0\cos\theta$$

球面内侧径向电场为零（导体内部电场为零），故

· 《》 p.275

* 3.15 将一个半径为 a、带电量为 q 的导体球放入均匀电场 E_0 中，求：

(1) 感应后球的偶极矩；

(2) 球内外的电势；

(3) 感应电偶极矩所对应的球面电荷分布的静电自能.

· p.82-83 · 3 / 3 p83:325-544

$$\sigma = \varepsilon_0(E_{r2} - 0) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

感应电荷在球面上产生的电势为

$$U_{感} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = E_0 a\cos\theta$$

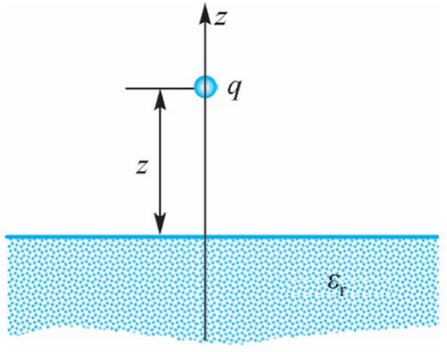
静电自能为

$$W = \frac{1}{2}\iint \sigma U_{感}\, dS = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (3\varepsilon_0 E_0\cos\theta)\cdot(E_0 a\cos\theta)\cdot a^2\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = 3\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \cdot \frac{2}{3} = 2\pi\varepsilon_0 a^3 E_0^2$$

· 《》 p.275

3. 16　如习题 3. 16 图所示，在真空中，点电荷 q 与一相对介质常数为 ε_r 的半无限大电介质相距为 z，求把该电荷移动至无限远处需要做的功.



习题 3. 16 图

· p.83–84 · 1 / 3 p83:544–800

3.16

取坐标系使介质分界面为 $z=0$ 平面，点电荷位于 $(0,0,z)$ $(z>0)$. 在 $z>0$ 区域（真空侧），介质界面的极化效应可用一个像电荷 q' 替代，位于对称点 $(0,0,-z)$ 处；在 $z<0$ 区域（介质侧），原电荷与极化电荷的联合效应可用另一个像电荷 q'' 替代，位于原电荷位置 $(0,0,z)$ 处.

由边界条件（电势连续、电位移法向分量连续）解得：

$$q'=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}q, \qquad q''=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}q$$

其中 $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ 为介质的绝对介电常数.

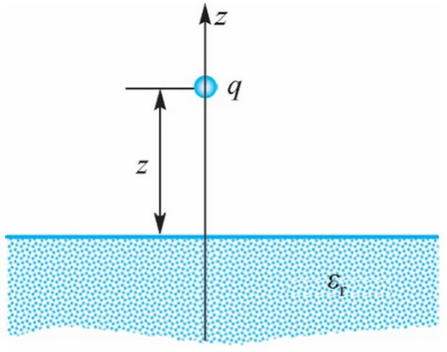
将 $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ 代入 q' 得：

$$q'=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_r\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_r\varepsilon_0}q=\frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}q=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}q$$

· 《》 p.275

3. 16　如习题 3. 16 图所示，在真空中，点电荷 q 与一相对介质常数为 ε_r 的半无限大电介质相距为 z，求把该电荷移动至无限远处需要做的功.

· p.83–84 · 2 / 3 p84:76–320



习题 3. 16 图

原电荷 q 在 $(0,0,z)$ 处受到的电场力仅来自像电荷 q'（自身场不产生净力）. 像电荷 q' 位于 $(0,0,-z)$，与原电荷的距离为 $2z$，因此电场力大小为：

$$F(z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q'}{(2z)^2}$$

代入 q'：

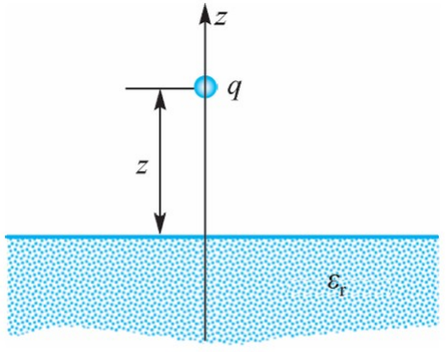
$$F(z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}q}{4z^2}=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 z^2}\cdot\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}$$

负号表示该力为吸引力，方向指向介质（$-z$ 方向）. 将电荷从 z 处缓慢移到无穷远，外力需克服电场力做功. 外力 F_{ext} 与电场力 F 大小相等、方向相反，即

$$F_{\text{ext}}=-F=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 z^2}\cdot\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}$$

· 《》 p.275

3. 16　如习题 3. 16 图所示，在真空中，点电荷 q 与一相对介质常数为 ε_r 的半无限大电介质相距为 z，求把该电荷移动至无限远处需要做的功.



习题 3. 16 图

· p.83–84 · 3 / 3 p84:320–509

外力做功为

$$A=\int_z^{\infty} F_{\text{ext}}\,dz'=\int_z^{\infty}\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 z'^2}\cdot\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\,dz'$$

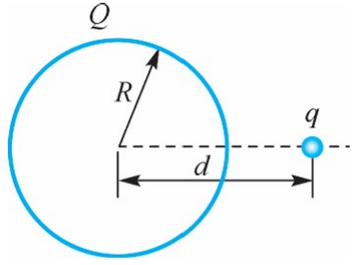
$$=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\int_z^{\infty}\frac{dz'}{z'^2}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\cdot\frac{1}{z}$$

因此，将点电荷从距无限大介质表面 z 处移到无穷远处，外力需做的功为

$$\boxed{A=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 z}\cdot\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}}$$

· 《》 p.275

3.17 如习题 3.17 图所示，半径为 R 的导体球带电量为 Q，球外距离球心为 d 处有一点电荷 q，计算把该电荷移到无限远处外力所做的功.



习题 3.17 图

· p.84–85 · 1 / 3 p84:509–800

3.17

为满足导体球面为等势面且总电荷为 Q 的条件，采用镜像法如下：

- 真实点电荷 q 位于 $(d,0,0)$.
- 在球内 $x=b=\dfrac{R^2}{d}$ 处放置像电荷 $q'=-\dfrac{R}{d}q$，用以抵消 q 在球面上产生的电势（若球接地）.
- 为使球的总电荷为 Q，在球心处附加一个点电荷 $q''=Q-q'=Q+\dfrac{R}{d}q$.

在球外区域（$r>R$），电场等效为 q、q'、q'' 三个点电荷产生的电场的叠加.

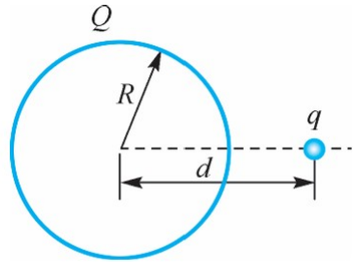
2. 点电荷 q 所受的电场力

点电荷 q 受到的电场力来自像电荷 q' 和球心电荷 q''（自身电场不产生净力）.

· 《》 p.275

3.17 如习题 3.17 图所示，半径为 R 的导体球带电量为 Q，球外距离球心为 d 处有一点电荷 q，计算把该电荷移到无限远处外力所做的功.

· p.84–85 · 2 / 3 p85:76–297



习题 3.17 图

(1) 来自像电荷 q' 的力

q' 位于 $x=b$，q 位于 $x=d$，两者距离为

$$d-b=d-\frac{R^2}{d}=\frac{d^2-R^2}{d}$$

库仑力大小为

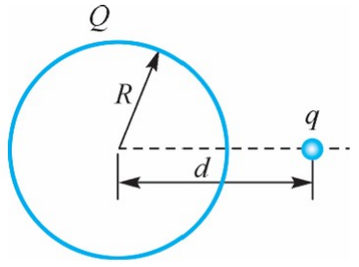
$$F_{q'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot q'}{(d-b)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot\left(-\dfrac{R}{d}q\right)}{\left(\dfrac{d^2-R^2}{d}\right)^2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rq^2d}{(d^2-R^2)^2}$$

负号表示该力为吸引力，方向沿 x 轴负向（指向球心）.

· 《》 p.275

3.17 如习题 3.17 图所示，半径为 R 的导体球带电量为 Q，球外距离球心为 d 处有一点电荷 q，计算把该电荷移到无限远处外力所做的功.

· p.84–85 · 3 / 3 p85:297–580



习题 3.17 图

(2) 来自球心电荷 q'' 的力

q'' 位于球心 $x=0$，与 q 的距离为 d，力的大小为

$$F_{q''}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot q''}{d^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(Q+\dfrac{R}{d}q\right)}{d^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{d^2}+\frac{Rq^2}{d^3}\right)$$

方向沿 x 轴正向（排斥力）.

$$F(d)=F_{q''}+F_{q'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{qQ}{d^2}+\frac{Rq^2}{d^3}-\frac{Rq^2d}{(d^2-R^2)^2}\right]$$

做功

$$W=-\int_d^\infty F(x)dx=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{qQ}{d}+\frac{Rq^2}{2d^2}-\frac{Rq^2}{2(d^2-R^2)}\right]$$